Aljabar Boolean

- Misalkan terdapat
  - Dua operator biner: + dan ·
  - Sebuah operator uner: ’.
  - *B* : himpunan yang didefinisikan pada opeartor +, ·, dan ’
  - 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari *B*.

  Tupel

  $(B, +, \cdot, ')$

  disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap a, b, $c \in B$ berlaku aksioma-aksioma atau postulat Huntington berikut:

  1. *Closure*: (i) $a + b \in B$
     (ii) $a \cdot b \in B$

  2. Identitas: (i) $a + 0 = a$
     (ii) $a \cdot 1 = a$

  3. Komutatif: (i) $a + b = b + a$
     (ii) $a \cdot b = b \,.\, a$

  4. Distributif: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
     (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

  5. Komplemen[1]: (i) $a + a' = 1$
     (ii) $a \cdot a' = 0$

- Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, harus diperlihatkan:
    1. Elemen-elemen himpunan B,
    2. Kaidah operasi untuk operator biner dan operator uner,
    3. Memenuhi postulat Huntington.

Aljabar Boolean Dua-Nilai

Aljabar Boolean dua-nilai:

- $B = \{0, 1\}$
- operator biner, + dan $\cdot$
- operator uner, ’
- Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	a'
0	1
1	0

Cek apakah memenuhi postulat Huntington:

1. *Closure* : jelas berlaku
2. Identitas: jelas berlaku karena dari tabel dapat kita lihat bahwa:

    (i) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
    (ii) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

3. Komutatif: jelas berlaku dengan melihat simetri tabel operator biner.

4. Distributif: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dapat ditunjukkan benar dari tabel operator biner di atas dengan membentuk tabel kebenaran:

a	b	c	$b + c$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$(a \cdot b) + (a \cdot c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(ii) Hukum distributif $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ dapat ditunjukkan benar dengan membuat tabel kebenaran dengan cara yang sama seperti (i).

5. Komplemen: jelas berlaku karena Tabel 7.3 memperlihatkan bahwa:

   (i) $a + a' = 1$, karena $0 + 0' = 0 + 1 = 1$ dan $1 + 1' = 1 + 0 = 1$
   (ii) $a \cdot a = 0$, karena $0 \cdot 0' = 0 \cdot 1 = 0$ dan $1 \cdot 1' = 1 \cdot 0 = 0$

Karena kelima postulat Huntington dipenuhi, maka terbukti bahwa $B = \{0, 1\}$ bersama-sama dengan operator biner + dan · operator komplemen ' merupakan aljabar Boolean.

Ekspresi Boolean

- Misalkan (B, +, $\cdot$, ') adalah sebuah aljabar Boolean. Suatu ekspresi Boolean dalam (B, +, $\cdot$, ') adalah:
  (i) setiap elemen di dalam B,
  (ii) setiap peubah,
  (iii) jika e_1 dan e_2 adalah ekspresi Boolean, maka $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$, e_1' adalah ekspresi Boolean

Contoh:

0
1
a
b
c
$a + b$
$a \cdot b$
$a' \cdot (b + c)$
$a \cdot b' + a \cdot b \cdot c' + b'$, dan sebagainya

Mengevaluasi Ekspresi Boolean

- Contoh: $a' \cdot (b + c)$

  jika $a = 0$, $b = 1$, dan $c = 0$, maka hasil evaluasi ekspresi:

  $0' \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$

- Dua ekspresi Boolean dikatakan **ekivalen** (dilambangkan dengan '=') jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk setiap pemberian nilai-nilai kepada n peubah.
  Contoh:

  $a \cdot (b + c) = (a \,.\, b) + (a \cdot c)$

Contoh. Perlihatkan bahwa $a + a'b = a + b$.

Penyelesaian:

a	b	a'	$a'b$	$a + a'b$	$a + b$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

- Perjanjian: tanda titik ($\cdot$) dapat dihilangkan dari penulisan ekspresi Boolean, kecuali jika ada penekanan:

  (i) $a(b + c) = ab + ac$
  (ii) $a + bc = (a + b)(a + c)$
  (iii) $a \cdot 0$, bukan a0

Prinsip Dualitas

- Misalkan S adalah kesamaan (*identity*) di dalam aljabar Boolean yang melibatkan operator +, $\cdot$, dan komplemen, maka jika pernyataan S^* diperoleh dengan cara mengganti

  $\cdot$ dengan +
  + dengan $\cdot$
  0 dengan 1
  1 dengan 0

  dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan S^* juga benar. S^* disebut sebagai *dual* dari S.

Contoh.

(i) $(a \cdot 1)(0 + a') = 0$ dualnya $(a + 0) + (1 \cdot a') = 1$
(ii) $a(a' + b) = ab$ dualnya $a + a'b = a + b$

Hukum-hukum Aljabar Boolean

1. Hukum identitas: (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = a$	2. Hukum idempoten: (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$
3. Hukum komplemen: (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	4. Hukum dominansi: (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$
5. Hukum involusi: (i) $(a')' = a$	6. Hukum penyerapan: (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$
7. Hukum komutatif: (i) $a + b = b + a$ (ii) $ab = ba$	8. Hukum asosiatif: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$
9. Hukum distributif: (i) $a + (b\,c) = (a + b)\,(a + c)$ (ii) $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$	10. Hukum De Morgan: (i) $(a + b)' = a'b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

Contoh 7.3. Buktikan (i) $a + a'b = a + b$ dan (ii) $a(a' + b) = ab$

<u>Penyelesaian</u>:

(i) $a + a'b = (a + ab) + a'b$ (Penyerapan)

$= a + (ab + a'b)$ (Asosiatif)

$= a + (a + a')b$ (Distributif)

$= a + 1 \bullet b$ (Komplemen)

$= a + b$ (Identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

Fungsi Boolean

- **Fungsi Boolean** (disebut juga fungsi biner) adalah pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, kita menuliskannya sebagai

  $$f : B^n \rightarrow B$$

  yang dalam hal ini B^n adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n (*ordered n-tuple*) di dalam daerah asal B.

- Setiap ekspresi Boolean tidak lain merupakan fungsi Boolean.
- Misalkan sebuah fungsi Boolean adalah

  $$f(x, y, z) = xyz + x'y + y'z$$

  Fungsi f memetakan nilai-nilai pasangan terurut ganda-3 (x, y, z) ke himpunan $\{0, 1\}$.

  Contohnya, $(1, 0, 1)$ yang berarti $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 1$ sehingga $f(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1' \cdot 0 + 0' \cdot 1 = 0 + 0 + 1 = 1$.

Contoh. Contoh-contoh fungsi Boolean yang lain:
1. $f(x) = x$
2. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$
3. $f(x, y) = x' y'$
4. $f(x, y) = (x + y)'$
5. $f(x, y, z) = xyz'$

- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut **literal**.

  Contoh: Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ pada contoh di atas terdiri dari 3 buah literal, yaitu x, y, dan z'.

Contoh. Diketahui fungsi Booelan $f(x, y, z) = xy\ z'$, nyatakan h dalam tabel kebenaran.

Penyelesaian:

x	y	z	$f(x, y, z) = xy\ z'$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Komplemen Fungsi

1. Cara pertama: menggunakan hukum De Morgan
   Hukum De Morgan untuk dua buah peubah, x_1 dan x_2, adalah

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

$$
\begin{aligned}
f'(x, y, z) &= (x(y'z' + yz))' \\
&= x' + (y'z' + yz)' \\
&= x' + (y'z')'\ (yz)' \\
&= x' + (y + z)\ (y' + z')
\end{aligned}
$$

2. Cara kedua: menggunakan prinsip dualitas.
   Tentukan dual dari ekspresi Boolean yang merepresentasikan f, lalu komplemenkan setiap literal di dalam dual tersebut.

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

dual dari f: $x + (y' + z')\,(y + z)$

komplemenkan tiap literalnya: $x' + (y + z)\,(y' + z') = f'$

Jadi, $f'(x, y, z) = x' + (y + z)(y' + z')$

Bentuk Kanonik

- Jadi, ada dua macam bentuk kanonik:
  1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product* atau SOP)
  2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum* atau POS)

Contoh: 1. $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ ◊ SOP

Setiap suku (*term*) disebut *minterm*

2. $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$
$(x' + y + z')(x' + y' + z)$ ◊ POS

Setiap suku (*term*) disebut *maxterm*

- Setiap *minterm*/*maxterm* mengandung literal lengkap

		Minterm		*Maxterm*	
x	y	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	$x\,y$	m_3	$x' + y'$	M_3

			Minterm		*Maxterm*	
x	y	z	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'y\,z'$	m_2	$x + y'+z$	M_2
0	1	1	$x'y\,z$	m_3	$x + y'+z'$	M_3
1	0	0	$x\,y'z'$	m_4	$x'+ y + z$	M_4
1	0	1	$x\,y'z$	m_5	$x'+ y + z'$	M_5
1	1	0	$x\,y\,z'$	m_6	$x'+ y'+ z$	M_6
1	1	1	$x\,y\,z$	m_7	$x'+ y'+ z'$	M_7

Contoh 7.10. Nyatakan tabel kebenaran di bawah ini dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Tabel 7.10

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Penyelesaian:

(a) SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

atau (dengan menggunakan lambang *minterm*),

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \sum (1, 4, 7)$$

(b) POS

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z') \\ & (x' + y + z')(x' + y' + z) \end{aligned}$$

atau dalam bentuk lain,

$$f(x, y, z) = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 = \prod(0, 2, 3, 5, 6)$$

Contoh 7.11. Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Penyelesaian:

(a) SOP

$$\begin{aligned} x &= x(y + y') \\ &= xy + xy' \\ &= xy (z + z') + xy'(z + z') \\ &= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' \end{aligned}$$

$y'z = y'z\ (x + x')$
$= xy'z + x'y'z$

Jadi $f(x, y, z) = x + y'z$
$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$
$= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$

atau $f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma\ (1,4,5,6,7)$

(b) POS
$f(x, y, z) = x + y'z$
$= (x + y')(x + z)$

$x + y' = x + y' + zz'$
$= (x + y' + z)(x + y' + z')$

$x + z = x + z + yy'$
$= (x + y + z)(x + y' + z)$

Jadi, $f(x, y, z) = (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z)$
$= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$

atau $f(x, y, z) = M_0M_2M_3 = \prod(0, 2, 3)$

Konversi Antar Bentuk Kanonik

Misalkan

$f(x, y, z) \quad = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7)$

dan f'adalah fungsi komplemen dari f,

$f'(x, y, z) = \Sigma\ (0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

$$
\begin{aligned}
f'(x, y, z) &= (f'(x, y, z))' = (m_0 + m_2 + m_3)' \\
&= m_0' \,.\, m_2' \,.\, m_3' \\
&= (x'y'z')'\ (x'y\,z')'\ (x'y\,z)' \\
&= (x + y + z)\ (x + y' + z)\ (x + y' + z') \\
&= M_0\, M_2\, M_3 \\
&= \prod\ (0,2,3)
\end{aligned}
$$

Jadi, $f(x, y, z) = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7) = \prod\ (0,2,3)$.

<u>Kesimpulan</u>: $m_j' = M_j$

Contoh. Nyatakan

$f(x, y, z) = \prod\ (0, 2, 4, 5)$ dan

$g(w, x, y, z) = \Sigma(1, 2, 5, 6, 10, 15)$

dalam bentuk SOP.

<u>Penyelesaian</u>:

$f(x, y, z) \quad = \Sigma\ (1, 3, 6, 7)$

$g(w, x, y, z) = \prod\ (0, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14)$

Contoh. Carilah bentuk kanonik SOP dan POS dari $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

<u>Penyelesaian</u>:

(a) SOP

$$
\begin{aligned}
f(x, y, \mathrm{z}) &= y' + xy + x'yz' \\
&= y' (x + x') (z + z') + xy (z + z') + x'yz' \\
&= (xy' + x'y') (z + z') + xyz + xyz' + x'yz' \\
&= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz'
\end{aligned}
$$

atau $f(x, y, \mathrm{z}) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

(b) POS

$f(x, y, \mathrm{z}) = M_3 = x + y' + z'$

Bentuk Baku

Contohnya,

$f(x, y, z) = y' + xy + x'yz$ (bentuk baku SOP

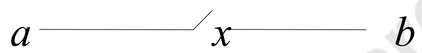
$f(x, y, z) = x(y' + z)(x' + y + z')$ (bentuk baku POS)

Aplikasi Aljabar Boolean

1. Jaringan Pensaklaran (*Switching Network*)

Saklar adalah objek yang mempunyai dua buah keadaan: buka dan tutup.

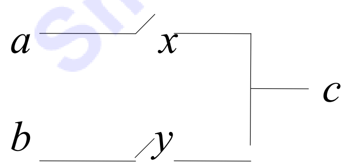
Tiga bentuk gerbang paling sederhana:

1. 

   Output b hanya ada jika dan hanya jika x dibuka $\Rightarrow x$

2. 

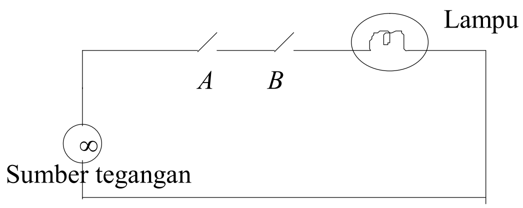
   Output b hanya ada jika dan hanya jika x dan y dibuka $\Rightarrow xy$

3. 

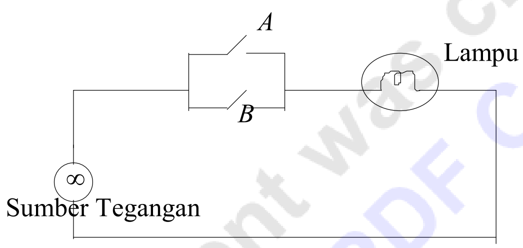
Output c hanya ada jika dan hanya jika x atau y dibuka $\Rightarrow x + y$

Contoh rangkaian pensaklaran pada rangkaian listrik:

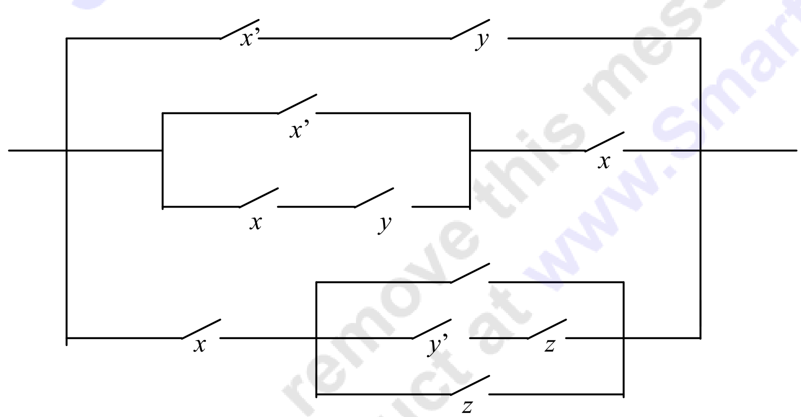
1. Saklar dalam hubungan SERI: logika AND



2. Saklar dalam hubungan PARALEL: logika OR

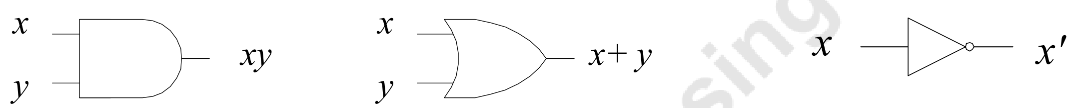


Contoh. Nyatakan rangkaian pensaklaran pada gambar di bawah ini dalam ekspresi Boolean.



<u>Jawab</u>: $x'y + (x' + xy)z + x(y + y'z + z)$

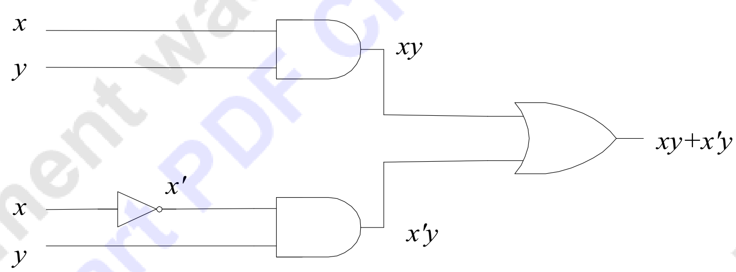
2. Rangkaian Digital Elektronik



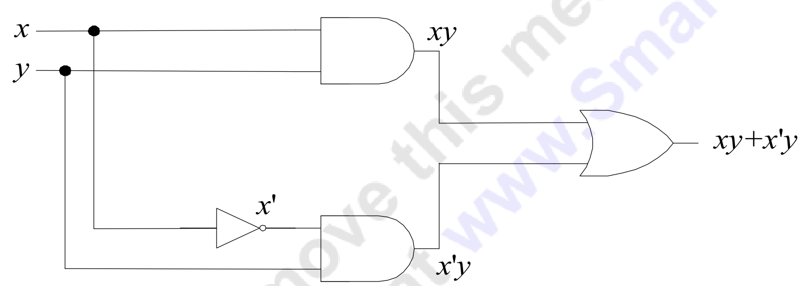
Gerbang AND   Gerbang OR   Gerbang NOT (*inverter*)

Contoh. Nyatakan fungsi $f(x, y, z) = xy + x'y$ ke dalam rangkaian logika.

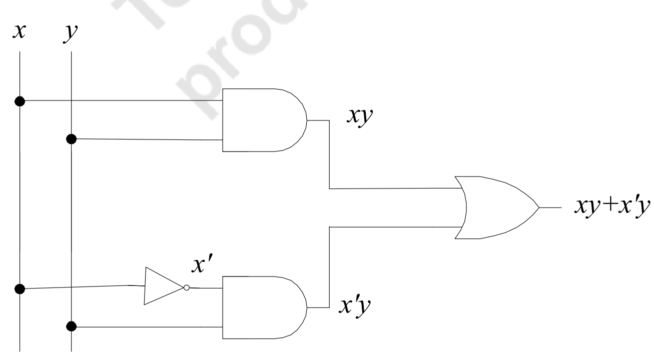
<u>Jawab</u>: (a) Cara pertama



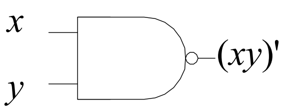
(b) Cara kedua



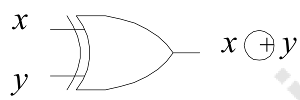
(b) Cara ketiga



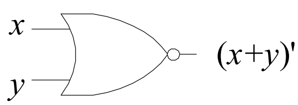
Gerbang turunan



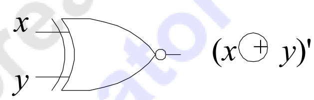
Gerbang NAND



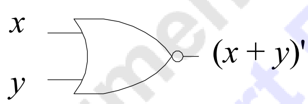
Gerbang XOR



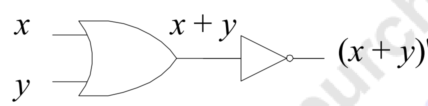
Gerbang NOR

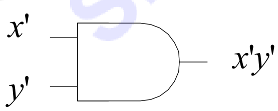


Gerbang XNOR

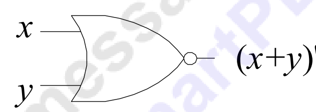


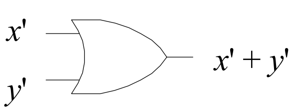
ekivalen dengan



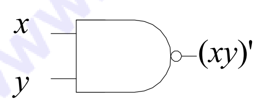


ekivalen dengan





ekivalen dengan



Penyederhanaan Fungsi Boolean

Contoh. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

disederhanakan menjadi

$f(x, y) = x' + y'$

Penyederhanaan fungsi Boolean dapat dilakukan dengan 3 cara:
1. Secara aljabar
2. Menggunakan Peta Karnaugh
3. Menggunakan metode Quine Mc Cluskey (metode Tabulasi)

1. Penyederhanaan Secara Aljabar

Contoh:

1. $f(x, y) = x + x'y$
$$= (x + x')(x + y)$$
$$= 1 \cdot (x + y)$$
$$= x + y$$

2. $f(x, y, z) = x'y'z + x'yz + xy'$
$$= x'z(y' + y) + xy'$$
$$= x'z + xz'$$

3. $f(x, y, z) = xy + x'z + yz = xy + x'z + yz(x + x')$
$$= xy + x'z + xyz + x'yz$$
$$= xy(1 + z) + x'z(1 + y) = xy + x'z$$

2. Peta Karnaugh

a. *Peta Karnaugh dengan dua peubah*

m_0	m_1
m_2	m_3

	y 0	1
x 0	$x'y'$	$x'y$
1	xy'	xy

b. *Peta dengan tiga peubah*

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

	yz 00	01	11	10
x 0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Contoh. Diberikan tabel kebenaran, gambarkan Peta Karnaugh.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	yz 00	01	11	10
x 0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

b. *Peta dengan empat peubah*

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

	yz 00	01	11	10
wx 00	*w'x'y'z'*	*w'x'y'z*	*w'x'yz*	*w'x'yz'*
01	*w'xy'z'*	*w'xy'z*	*w'xyz*	*w'xyz'*
11	*wxy'z'*	*wxy'z*	*wxyz*	*wxyz'*
10	*wx'y'z'*	*wx'y'z*	*wx'yz*	*wx'yz'*

Contoh. Diberikan tabel kebenaran, gambarkan Peta Karnaugh.

w	*x*	*y*	*z*	*f*(*w*, *x*, *y*, *z*)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

	yz 00	01	11	10
wx 00	0	1	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	0

Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh

1. *Pasangan*: dua buah 1 yang bertetangga

wx \ *yz*	00	01	**1**1	**1**0
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxyz + wxyz'$
Hasil Penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wxy$

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) &= wxyz + wxyz' \\ &= wxy(z + z') \\ &= wxy(1) \\ &= wxy \end{aligned}$$

2. *Kuad*: empat buah 1 yang bertetangga

wx \ *yz*	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz'$
Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wx$

Bukti secara aljabar:

$$
\begin{aligned}
f(w, x, y, z) &= wxy' + wxy \\
&= wx(z' + z) \\
&= wx(1) \\
&= wx
\end{aligned}
$$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

Contoh lain:

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wx'y'z' + wx'y'$z

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wy'$

3. *Oktet*: delapan buah 1 yang bertetangga

	yz 00	01	11	10
wx 00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Sebelum disederhanakan: $f(a, b, c, d) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz' + wx'y'z' + wx'y'z + wx'yz + wx'yz'$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = w$

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) &= wy' + wy \\ &= w(y' + y) \\ &= w \end{aligned}$$

	yz 00	01	11	10
wx 00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Contoh 5.11. Sederhanakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$.

Jawab:

Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

x \ yz	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

Hasil penyederhanaan: $f(x, y, z) = yz + xz'$

Contoh 5.12. Andaikan suatu tabel kebenaran telah diterjemahkan ke dalam Peta Karnaugh. Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian sesederhana mungkin.

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

Jawab: (lihat Peta Karnaugh) $f(w, x, y, z) = wy' + yz' + w'x'z$

Contoh 5.13. Minimisasi fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

wx \ *yz*	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Jawab: (lihat Peta Karnaugh) $f(w, x, y, z) = w + xy'z$

Jika penyelesaian Contoh 5.13 adalah seperti di bawah ini:

wx \ *yz*	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

maka fungsi Boolean hasil penyederhanaan adalah

$$f(w, x, y, z) = w + w'xy'z \qquad \text{(jumlah literal = 5)}$$

yang ternyata masih belum sederhana dibandingkan $f(w, x, y, z) = w + xy'z$ (jumlah literal = 4).

Contoh 5.14. (Penggulungan/*rolling*) Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		yz 00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	0	0

<u>Jawab</u>: $f(w, x, y, z) = xy'z' + xyz'$ ==> belum sederhana

Penyelesaian yang lebih minimal:

		yz 0**0**	01	11	1**0**
wx	00	0	0	0	0
	0**1**	1	0	0	1
	1**1**	1	0	0	1
	10	0	0	0	0

$f(w, x, y, z) = xz'$ ===> lebih sederhana

Contoh 5.15: (Kelompok berlebihan) Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

wx \ *yz*	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0

<u>Jawab</u>: $f(w, x, y, z) = xy'z + wxz + wyz$ $\rightarrow$ masih belum sederhana.

Penyelesaian yang lebih minimal:

wx \ *yz*	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0

$f(w, x, y, z) = xy'z + wyz$ ===> lebih sederhana

Contoh 5.16. Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

<u>Jawab</u>: (lihat Peta Karnaugh di atas) $f(a, b, c, d) = ab + ad + ac + bcd$

Contoh 5.17. Minimisasi fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'z + x'y + xy'z + yz$

<u>Jawab</u>:

$$x'z = x'z(y + y') = x'yz + x'y'z$$
$$x'y = x'y(z + z') = x'yz + x'yz'$$
$$yz = yz(x + x') = xyz + x'yz$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x'z + x'y + xy'z + yz \\ &= x'yz + x'y'z + x'yz + x'yz' + xy'z + xyz + x'yz \\ &= x'yz + x'y'z + x'yz' + xyz + xy'z \end{aligned}$$

Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

x \ yz	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	

Hasil penyederhanaan: $f(x, y, z) = z + x'yz'$

Peta Karnaugh untuk lima peubah

	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

Garis pencerminan

Contoh 5.21. (Contoh penggunaan Peta 5 peubah) Carilah fungsi sederhana dari $f(v, w, x, y, z) = \Sigma$ (0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)

<u>Jawab</u>:

Peta Karnaugh dari fungsi tersebut adalah:

vw \ *xyz*	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1			1	1			1
01		1	1			1	1	
11		1	1			1	1	
10		1					1	

Jadi $f(v, w, x, y, z) = wz + v'w'z' + vy'z$

Keadaan *Don't Care*

Tabel 5.16

w	x	y	z	desimal
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	*don't care*
1	0	1	1	*don't care*
1	1	0	0	*don't care*
1	1	0	1	*don't care*
1	1	1	0	*don't care*
1	1	1	1	*don't care*

Contoh 5.25. Diberikan Tabel 5.17. Minimisasi fungsi f sesederhana mungkin.

Tabel 5.17

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	X
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

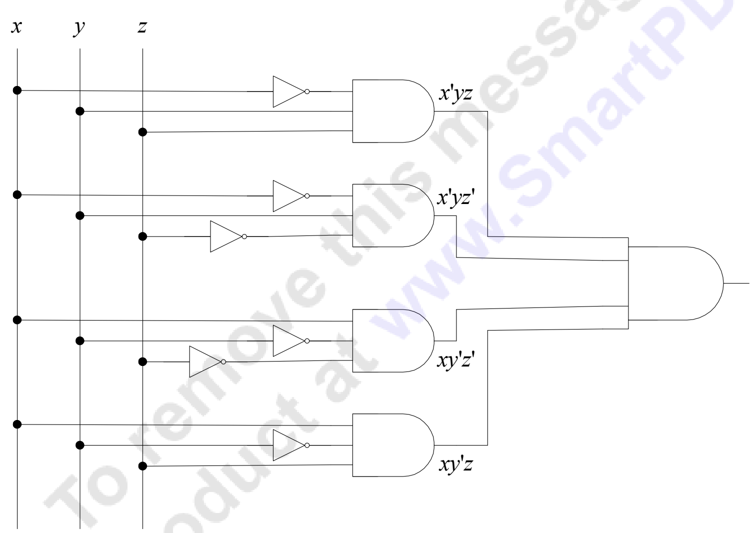
Jawab: Peta Karnaugh dari fungsi tersebut adalah:

ab \ *cd*	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	0
11	*X*	*X*	*X*	*X*
10	*X*	0	*X*	*X*

Hasil penyederhanaan: $f(a, b, c, d) = bd + c'd' + cd$

Contoh 5.26. Minimisasi fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z$. Gambarkan rangkaian logikanya.

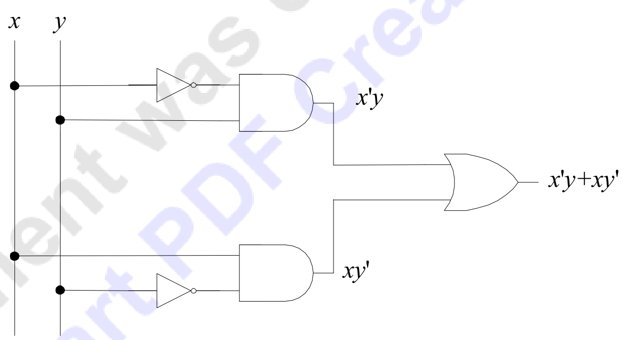
Jawab: Rangkaian logika fungsi $f(x, y, z)$ sebelum diminimisasikan adalah seperti di bawah ini:



Minimisasi dengan Peta Karnaugh adalah sebagai berikut:

x \ yz	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

Hasil minimisasi adalah $f(x, y, z) = x'y + xy'$.



Contoh 5.28. Berbagai sistem digital menggunakan kode *binary coded decimal* (BCD). Diberikan Tabel 5.19 untuk konversi BCD ke kode *Excess*-3 sebagai berikut:

Tabel 5.19

	Masukan BCD				Keluaran kode *Excess*-3			
	w	x	y	z	$f_1(w, x, y, z)$	$f_2(w, x, y,z)$	$f_3(w, x, y, z)$	$f_4(w, x, y, z)$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1	0	0

(a) $f_1(w, x, y, z)$

wx \ yz	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$$f_1(w, x, y, z) = w + xz + xy = w + x(y + z)$$

(b) $f_2(w, x, y, z)$

wx \ yz	00	01	11	10
00		1	1	1
01	1			
11	X	X	X	X
10		1	X	X

$$f_2(w, x, y, z) = xy'z' + x'z + x'y = xy'z' + x'(y + z)$$

(c) $f_3(w, x, y, z)$

wx \ yz	00	01	11	10
00	1		1	
01	1		1	
11	X	X	X	X
10	1		X	X

$$f_3(w, x, y, z) = y'z' + yz$$

(d) $f_4(w, x, y, z)$

wx \ yz	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	X	X	X	X
10	1		X	X

$f_4(w, x, y, z) = z'$